II. Les Matrices - Exercices

1. Construction et manipulation de matrices : le carré magique !

Soit la matrice de Dürer :

$$A = \begin{matrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{matrix}$$

- Vérifier que la matrice A est magique ? (C-à-d que la somme de chaque ligne, de chaque colonne, ainsi que la diagonale donnent toute la même somme).
- Est-ce que la somme, respectivement la multiplication (coefficient par coefficient et matricielle) de deux matrices A reste magique ?
- Rajouter une 5ème colonne [0; 0; 0; 9] à la matrice A.

2. Calcul élément par élément: mesure du coefficient de friction

Le coefficient de friction entre deux surfaces peut être determiné expérimentalement en mesurant la force nécessaire pour faire glisser des objets de même nature mais de masse m différente. L'équation de friction est :

$F = \mu * N$

où F est la force de résistance à la friction ou la force nécessaire pour faire glisser l'objet et N = m*g, le poids de l'objet.

Des résultats expérimentaux sont données dans le tableau ci-dessous (Ron Kurtus, ©school of champion, 2007)

# mesure	1	2	3	4	5	6
Masse de l'objet (Kg)	2	4	5	10	20	50
Force F (N)	12.5	23.5	30	61	117	294

Exercice :

- Déterminer le coefficient de friction pour chaque test.
- Déterminer le coefficient de friction moyen obtenu entre ces deux surfaces (utiliser la fonction `mean`).

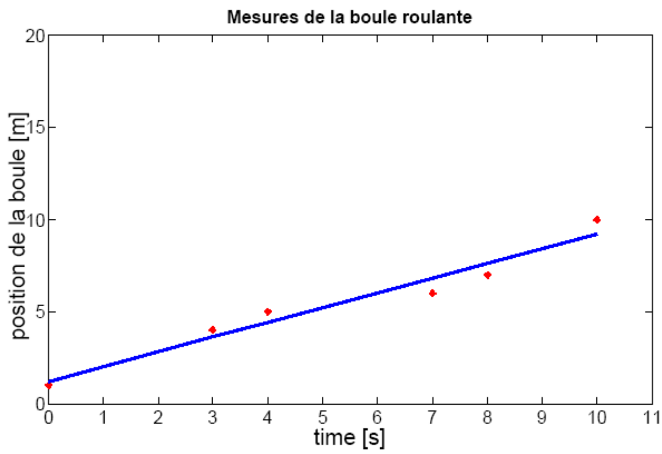
- Résoudre l'équation pour μ à l'aide de la division matricielle et discuter votre résultat (quelle est la différence entre la résolution du problème à l'aide de la division matricielle ou la moyenne de la division élément par élément).

3. Division matricielle : analyse numérique à l'aide de la méthode des moindres carrés (d'après [1])

La distance y que parcourt, dans un intervalle de temps t, une boule roulant à vitesse constante v est donnée par l'équation linéaire y = a + vt, a étant une constante. Des mesures ont été effectuées afin de contrôler cette affirmation. L'expérience est donnée dans le tableau ci-dessous pour quelques pas de temps t :

Tableau des mesures :

t	0	3	4	7	8	10
y	1	4	5	6	7	10



De par le graphique, nous remarquons que les mesures ne sont pas très précises. En supposant que la vitesse soit constante, nous essayons de déterminer la meilleure valeur de a et v en minimisant la somme des erreurs au carré (méthode des moindres carrés).

L'équation linéaire devient : y = a + vt + r, r étant le résidu provenant de l'erreur de la mesure. La méthode des moindres carrés consiste à déterminer a et v tels que la somme des carrés des résidus soit minimal. Il faut donc minimiser

$S = \sum r_i^2 = \sum ||y_i - a - vt_i||^2$, pour i = 1, 2, …, m mesures.

Ce système d'équations linéaires peut s'écrire de la façon suivante :

$\alpha_{11}\, a + \alpha_{12}\, v = y_1$

$\alpha_{21}\, a + \alpha_{22}\, v = y_2$

…

$\alpha_{m1}\, a + \alpha_{m2}\, v = y_m$

En notation matricielle, l'équation devient y = Ax + r, où :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & . \\ & . \\ 1 & t_m \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ r_m \end{bmatrix}$$

Après développement et dérivation (pour trouver le minimum), le système s'écrit :

$A^T A x = A^T y$

La solution du système linéaire ci-dessus est appelée la solution selon la méthode des moindres carrés du système de m équations à deux inconnues. Elle est désignée par x' (' pour estimation), tel que

$x' = (A^T A)^{-1} A^T y$ <=> A est inversible

Exercice:

- Déterminer les meilleures valeurs de a' et v' à l'aide de la résolution d'un système d'application linéaire (division matricielle).

4. Références

[1] Arbenz et Wohlhausen, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1990.