

II. Les Matrices - Corrigé

1. Construction et manipulation de matrices : le carré magique !

Soit la matrice de Dürer :

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

```
A = [16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1];
```

- Vérifier que la matrice A est magique ? (C-à-d que la somme de chaque ligne, de chaque colonne, ainsi que la diagonale donnent toute la même somme).

```
l_magic = sum(A)
c_magic = sum(A, 2)
d_magic = sum(diag(A))
```

Réponse : magique (constant magique = 34).

- Est-ce que la somme, respectivement la multiplication (coefficient par coefficient et matricielle) de deux matrices A reste magique ?

```
B = A+A;
l_sum_magic = sum(B)
c_sum_magic = sum(B, 2)
d_sum_magic = sum(diag(B))
```

Réponse : magique (constant magique = 68).

```
% A.*A n'est pas magique!
C = A.*A;
l_prod_magic = sum(C)
c_prod_magic = sum(C, 2)
d_prod_magic = sum(diag(C))

l_prod_magic =
    378    370    370    378

c_prod_magic =
    438    310    310    438

d_prod_magic =
    406
```

Réponse: non magique.

```
D = A*A;
l_prodM_magic = sum(D)
c_prodM_magic = sum(D, 2)
d_prodM_magic = sum(diag(D))

l_prodM_magic =
    1156         1156         1156         1156

c_prodM_magic =
    1156         1156         1156         1156

d_prodM_magic =
    1284
```

Réponse : non magique.

- Rajouter une 5^{ème} colonne [0; 0; 0; 9] à la matrice A.

```
>> A(:,5) = [ 0; 0; 0; 9 ]

A =
    16     3     2    13     0
     5    10    11     8     0
     9     6     7    12     0
     4    15    14     1     9
```

2. Calcul élément par élément: mesure du coefficient de friction

- Déterminer le coefficient de friction pour chaque test.

```
% Entrer la masse des objets m
m = [2 4 5 10 20 50];

% Entrer les forces F enregistrées
F = [12.5 23.5 30 61 117 294];

% Calculer la valeur du coeff. de friction mu pour chaque test
g = 9.81;
mu = F./(m*g)
```

Réponse :

```
mu =
    0.6371    0.5989    0.6116    0.6218    0.5963    0.5994
```

- Déterminer le coefficient de friction moyen obtenu entre ces deux surfaces (utiliser la fonction mean).

```
% Calculer la valeur moyenne du vecteur mu
mu_mean = mean(mu)
```

Réponse :

```
mu_mean =
    0.6109
```

- Résoudre l'équation pour μ à l'aide de la division matricielle et discuter votre résultat (quelle est la différence entre la résolution du problème à l'aide de la division matricielle ou la moyenne de la division élément par élément).

```
% Résoudre l'équation linéaire F = N*mu, avec N=m*g
% A --> N
% x --> mu           Ax = B ---> x = B/A
% B --> F

% Créer le vecteur colonne A et B
mu_est = F/(m*g)

% La force estimée par le modèle est ainsi
F_est = mu_est*(m*g)
```

Réponse :

```
mu_est =
    0.5999

F_est =
    11.7695    23.5389    29.4236    58.8473    117.6946    294.2365
```

La division matricielle résout l'équation $F = N\mu$ sous forme de système linéaire. La solution est ainsi obtenue de façon numérique à l'aide d'une méthode basée sur l'élimination gaussienne. Comme la solution n'est pas exacte, Matlab retourne la solution la meilleure en minimisant l'erreur entre les mesures observées et le modèle physique censé décrire ces observations par la méthode des moindres carrés (cf. théorie sur la régression + exercice 3).

La moyenne n'est qu'une moyenne arithmétique des différents μ obtenus après chaque mesure effectuée.

3. Division matricielle : analyse numérique à l'aide de la méthode des moindres carrés

Déterminer les meilleures valeurs de a' et v' à l'aide de la résolution d'un système d'application linéaire (division matricielle).

```
% Entrer la mesure du temps
t = [0; 3; 4; 7; 8; 10];

% Entrer la position enregistrée de la balle
y = [1; 4; 5; 6; 7; 10];

% Ecrire le système linéaire y_m = 1*a + v*t_m, pour m mesures de
façon matricielle, par exemple y = A*x.
```

```
% A est une matrix de deux éléments a et t pour m mesures
A = zeros(length(t),2);
A(:,1) = 1;
A(:,2) = t;

% Résoudre le système linéaire en utilisant la solution des
moindres carrés
x_estimate = inv(A'*A)*(A'*y)
% ou en utilisant la division matricielle gauche
x_estimate = (A'*A)\(A'*y)
```

Réponse :

```
x_estimate =
    1.2228
    0.8020
```

→ $a' = 1.2228$, $v' = 0.8020$