II. Les Matrices - Exercices

1. Construction et manipulation de matrices : le carré magique !

Soit la matrice de Dürer :

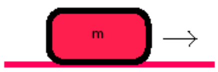
$$A = \begin{matrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{matrix}$$

- vérifier que la matrice A est magique ? (C-à-d que la somme de chaque ligne, de chaque colonne, ainsi que la diagonale donnent toute la même somme).
- Est-ce que la somme, resp. la multiplication de deux matrices A reste magique ?
- Que donne la division de deux matrice magique A ?
- Rajouter une 5 ème colonne = [0 0 0 9]' à la matrice A ?

2. Calcul éléments par éléments: mesure du coefficient de friction

Le coefficient de friction entre deux surfaces peut être determiné expérimentalement en mesurant la force nécessaire pour faire glisser des objets de même nature mais de masse m différente. L'équation de friction est :

$F = \mu * N$



où F est la force de résistance à la friction ou la force nécessaire pour faire glisser l'objet et N = m*g, le poids de l'objet.

Le résultat des mesures de forces sont données dans le tableau ci-dessous (Ron Kurtus, ©school of champion, 2007)

# mesure	1	2	3	4	5	6
Masse de l'objet (Kg)	2	4	5	10	20	50
Force F (N)	12.5	23.5	30	61	117	294

Exercice :

- Déterminer le coefficient de friction pour chaque test.
- Déterminer le coefficient de friction moyen obtenu entre ces deux surfaces (utiliser la fonction `mean`.

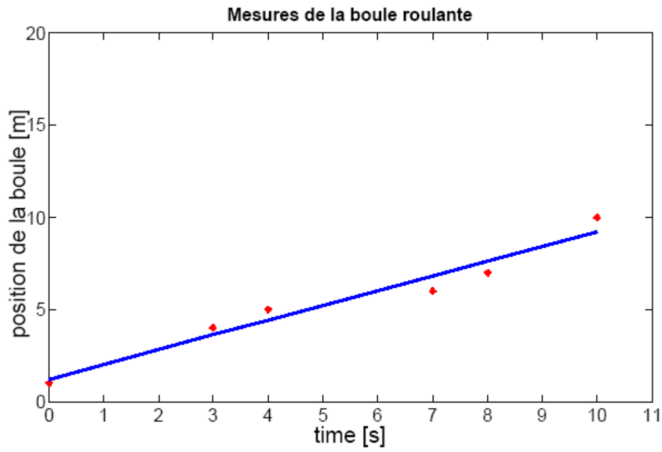
- Résoudre l'équation pour μ à l'aide de la division matricielle et discuter votre résultat (c-à-d quel est la différence entre résoudre le problème à l'aide de la division matricielle ou la moyenne de la division élément par élément.

3. Division matricielles : analyse numérique à l'aide de la méthode des moindres carrés (d'après [1])

La distance y que parcourt dans un intervalle de temps t une boule roulant à vitesse constante v est donnée par l'équation linéaire $y = a + vt$, a étant une constante. Des mesures in-situ été effectuée afin de contrôler cette affirmation. L'expérience est donnée dans le tableau ci-dessous pour quelques pas de temps t :

Tableau des mesures :

t	0	3	4	7	8	10
y	1	4	5	6	7	10



Représenté dans le graphe, nous remarquons que les mesures ne sont pas très précises. Il se peut aussi que la vitesse ne soit pas tout à fait constante. En assumant cependant que la vitesse est constante nous essayons donc de déterminer la meilleure valeur de a et v en minimisant la somme des erreurs au carré (méthode des moindre carrés).

L'équation linéaire devient : $y = a + vt + r$, r étant le résidu provenant de l'erreur de la mesure. La méthode des moindres carrés consiste à déterminer a et v tels que la somme des carrés des résidus soit minimal. Il faut donc minimiser

$S = \sum r_i^2 = \sum (y_i - a - vt_i)^2$, i = 1, 2, …, m mesures. La condition nécessaire pour minimiser la somme par rapport à a et v sont:

$$dS/da = -2 \sum (y_i - a - vt_i) = 0$$

$$dS/dv = -2 \sum t_i(y_i - a - vt_i) = 0$$

Ce système d'équations linéaires peut s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha_{11}\, a + \alpha_{12}\, v = y_1$$

$$\alpha_{21}\, a + \alpha_{22}\, v = y_2$$

…

$\alpha_{m1}\, a + \alpha_{m2}\, v = y_m$

En notation matricielle, l'équation devient y = Ax + r, ou :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & . \\ & . \\ 1 & t_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ v \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ r_m \end{bmatrix}$$

Alors pour minimiser la somme des erreurs au carré (S minimal), S devient en notation matricielle :

$S = r^T r = (y - Ax)^T (y - Ax)$

Et le système s'écrit dès lors

$A^T A x = A^T y$

La solution du système linéaire ci-dessus est appelé la solution selon la méthode des moindres carrés du système de m équations à deux inconnues. Elle est désignée par x' (' pour estimation), tel que

$x' = (A^T A)^{-1} A^T y$ <=> A est invertible

Exercice:

- Déterminer les meilleures valeurs de a' et v' à l'aide de la résolution d'un système d'application linéaire (division matricielle).
- Que représente a' et v'. Illustrer votre réponse de façon graphique.

4. Références

[1] Arbenz et Wohlhausen, Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1990.