II. Les Matrices - Corrigé

1. Construction et manipulation de matrices : le carré magique !

Soit la matrice de Dürer :

A =

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

```
% Entrer la Dürrer Matrix
A = [16 3 2 13; 5 10 11 8; 9 6 7 12; 4 15 14 1];
```

- vérifier que la matrice A est magique ? (C-à-d que la somme de chaque ligne, de chaque colonne, ainsi que la diagonale donnent toute la même somme).

```
% A est magic <=>
l_magic = sum(A)
c_magic = sum(A')
d_magic = sum(diag(A))
```

Réponse : 34

- Est-ce que la somme, resp. la multiplication de deux matrices A reste magique ?

```
% A+A est magic!
sum_magic = A+A;
l_sum_magic = sum(sum_magic)
c_sum_magic = sum(sum_magic')
d_sum_magic = sum(diag(sum_magic))
```

Réponse : 68

```
% A.*A n'est pas magic!
prod_magic = A.*A;
l_prod_magic = sum(prod_magic)
c_prod_magic = sum(prod_magic')
d_prod_magic = sum(diag(prod_magic))

% but A*A n'est pas magic!
prodM_magic = A*A;
l_prodM_magic = sum(prodM_magic)
c_prodM_magic = sum(prodM_magic')
d_prodM_magic = sum(diag(prodM_magic))
```

Réponse:

```
l_prod_magic =
   378   370   370   378

c_prod_magic =
   438   310   310   438

d_prod_magic =
        406

l_prodM_magic =
        1156        1156        1156        1156

c_prodM_magic =
        1156        1156        1156        1156

d_prodM_magic =
        1284
```

- Que donne la division de deux matrice magique A ?

```
%A./A est magic!
div_magic = A./A

%Réponse : ==> rend la matrice Identité

%A/A n'est pas magic!
divM_magic = A/A
l_prodM_magic = sum(divM_magic)
c_prodM_magic = sum(divM_magic')
d_prodM_magic = sum(diag(divM_magic))
```

Réponse :

```
l_prodM_magic =
    0.2917   -1.1250    3.1250    1.7083

c_prodM_magic =
     1     1     1     1

d_prodM_magic =
    2.1250
```

- Rajouter une 5 ème colonne = [0 0 0 9]' à la matrice A ?

```
>> A(:,5) = [0 0 0 9]

A =
    16     3     2    13     0
     5    10    11     8     0
     9     6     7    12     0
     4    15    14     1     9
```

En résumé : La matrix de Dürrer est magique ! La somme de deux matrices de Dürrer est magique. Par contre, la multiplication matricielle ainsi que la multiplication élément par élément (A.*A) ne l'est plus. Au contraire, la division matricielle de deux matrices de Dürrer n'est pas magique, mais sa division élément par élément l'est, retournant la matrice Identité.

2. Calcul éléments par éléments: mesure du coefficient de friction

Exercice :

- Déterminer le coefficient de friction pour chaque test.

```
%Entrer la valeur masse des objets m
m = [2 4 5 10 20 50];

%Entrer la valeur de force F enregistrées
F = [12.5 23.5 30 61 117 294];

%calculere la valeur du coefficient de friction MU pour chaque
test
%N = m*g, with g = 9.81
g = 9.81;
mu = F./(m*g)
```

Réponse :

```
mu =
    0.6371    0.5989    0.6116    0.6218    0.5963    0.5994
```

- Déterminer le coefficient de friction moyen obtenu entre ces deux surfaces (utiliser la fonction `mean`.

```
%calculer la valeur moyenne du vecteur mu
mu_mean = mean(mu)
```

Réponse :

```
mu_mean =
    0.6109
```

- Résoudre l'équation pour μ à l'aide de la division matricielle et discuter votre résultat (c-à-d quel est la différence entre résoudre le problème à l'aide de la division matricielle ou la moyenne de la division élément par élément.

```
%résoudre l'équation linaire F = N*mu, avec N=m*g
%A  --> N
%x  --> mu             Ax = b ---> X = A/b
%b  --> F

%créer le vecteur colonne A et b
mu_est = F/(m*g)
```

```
%la force estimée par le modèle est ainsi
F_est = mu_est*(m*g)
```

Réponse :

```
mu_est =
    0.5999

F_est =
   11.7695   23.5389   29.4236   58.8473  117.6946  294.2365
```

La division matricielle résout l'équation F = N*µ sous forme de système d'application linéaire. La solution est ainsi obtenue de façon nummérique à l'aide d'une méthode basée sur l'élimination gaussienne. Comme la solution n'est pas exacte, Matlab retourne la solution la meilleure en minimisant l'erreur entre les mesures observées et le modèle physique sensé décrire ces observations pas la méthode des moindres carrés (cf. théorie sur la régression + exercice 3).

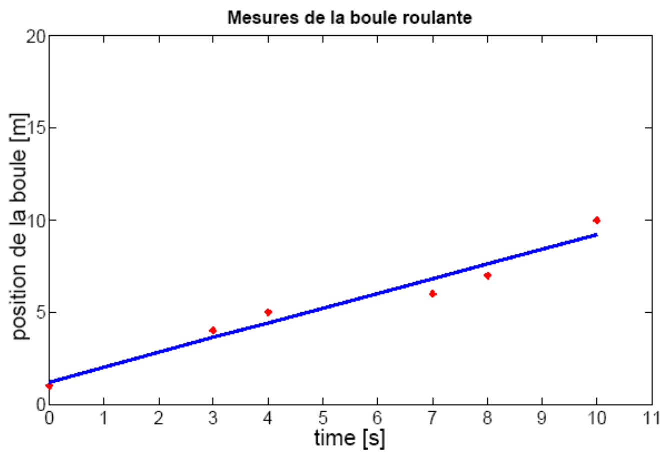
La moyenne n'est qu'une moyenne arithmétique des différents µ obtenu après chaque mesure effectuée.

3. Division matricielles : analyse numérique à l'aide de la méthode des moindres carrés

La distance y que parcourt dans un intervalle de temps t une boule roulant à vitesse constante v est donnée par l'équation linéaire y = a + vt, a étant une constante. Des mesures in-situ été effectuée afin de contrôler cette affirmation. L'expérience est donnée dans le tableau ci-dessous pour quelques pas de temps t :

Tableau des mesures :

t	0	3	4	7	8	10
y	1	4	5	6	7	10



Exercice:

Déterminer les meilleures valeurs de a' et v' à l'aide de la résolution d'un système d'application linéaire (division matricielle).

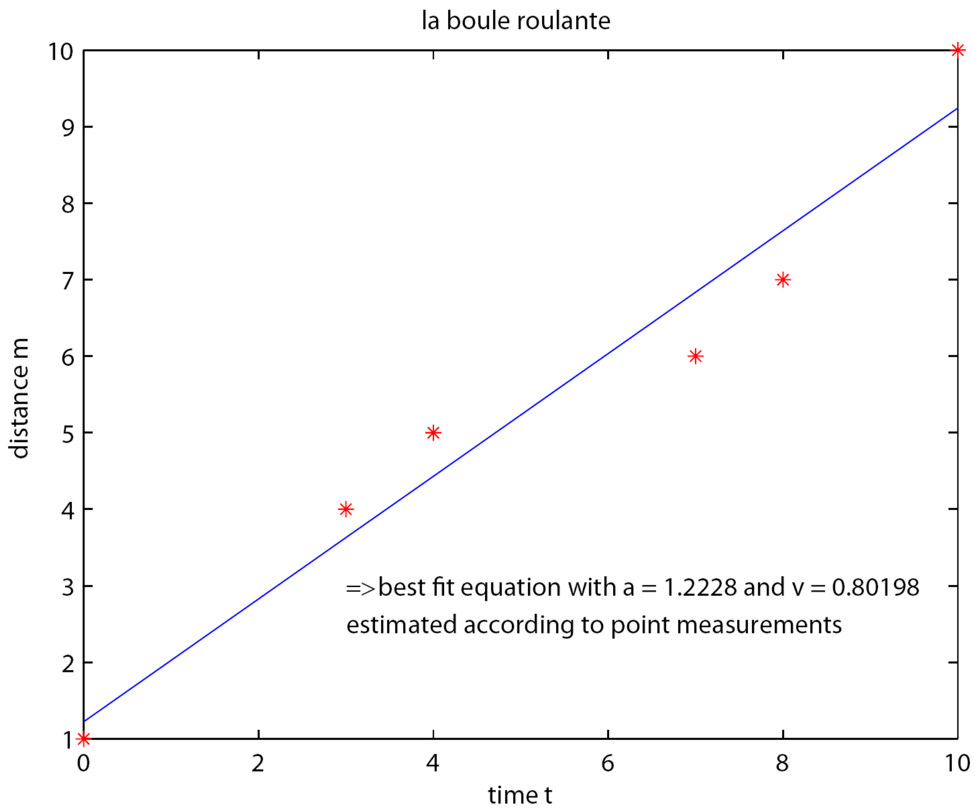
Que représente a' et v'. Illustrer votre réponse de façon graphique.

```
% Entrer le data « temps », quand la mesure a été effectuée
t = [0 3 4 7 8 10];

% Entrer la position enregistrée de la balle
y = [1 4 5 6 7 10];

% Ecrire le système linéaire y_m = 1*a + v*t_m, pour m mesures de
façon matricielle, exemple Y = A*X.

% Y est la matrix transposée de y
Y = y';
% A est une matrix de deux elements a and t avec m mesures
A = zeros(length(t),2);
A(:,1) = 1;
A(:,2) = t';

% résoudre le système linéaire en utilisant la solution des
moindres carrés
x_estimate = inv(A'*A)*(A'*Y)
% et en utilisant la division matricielle gauche
x_est = (A'*A)\(A'*Y)

% graphique
a = x_estimate(1);
v = x_estimate(2)
y_est =  a + v*t';

figure
plot(t',y','*r')
hold on
plot(t',y_est,'-b')
xlabel('time t')
ylabel('distance m')
title('la boule roulante')
text(3,3,['\rightarrow best fit equation with a = ', num2str(a) ,'
and v = ', num2str(v) ,''],...
     'HorizontalAlignment','left')
text(3,2.5,'estimated according to point measurements ',...
     'HorizontalAlignment','left')
```

Réponse :

```
x_estimate =
    1.2228
    0.8020

x_est =
    1.2228
    0.8020
```

Figure :


la boule roulante
distance m
time t
0
2
4
6
8
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
=>best fit equation with a = 1.2228 and v = 0.80198
estimated according to point measurements